1.8 函数的连续性与间断点

1.8.1 函数的连续性

1.8.2 函数的间断点

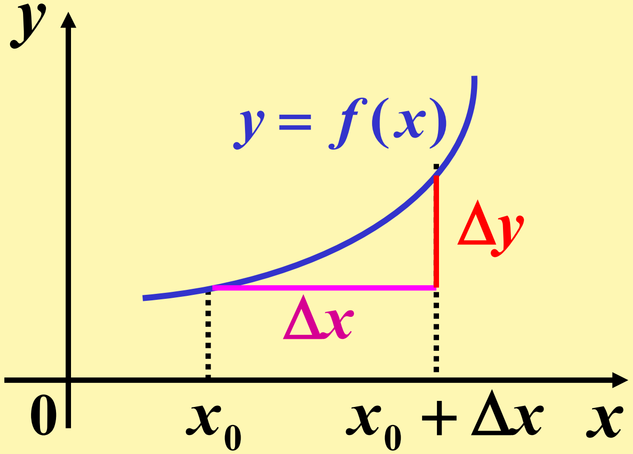
引例：温度 T 随着时间 t 的变化

预备知识

设函数 $f(x)$在$U_\delta(x_0)$内有定义，$\forall\ x \in U_\delta(x_0)$,

$\Delta x = x - x_0$，称为自变量在点 x_0的增量.

$\Delta y = f(x) - f(x_0)$,称为函数 $f(x)$相应于Δx的增量.



注：（1）增量可以是正的，也可以是负的

（2）Δx，Δy 是一个整体记号

1.8.1　函数的连续性

1.函数在一点的连续的定义

定义1.8.1 设函数 $y=f(x)$在x_0的某邻域内有定义，若

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$ 称函数 $y=f(x)$在 x_0 点处连续。

$$0=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\right]$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\Delta x\to 0}f(x_0+\Delta x)=f(x_0)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$

定义1.8.2 设函数 $y=f(x)$在x_0的某邻域内有定义，如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

那么就称函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点处连续。

注 $f(x)$在x_0点连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)=f(\lim\limits_{x\to x_0} x)$

$\Leftrightarrow$ 函数运算与极限运算可交换次序。

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0,$ 使当

$0<|x-x_0|<\delta$时，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon.$

函数$f(x)$在x_0点处连续 $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得当

$|x-x_0|<\delta$ 时，恒有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

记右极限：$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0^+)$

左极限：$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0^-)$

定义　若 $f(x_0^-) = f(x_0)$，则称$f(x)$在x_0处左连续；

若 $f(x_0^+) = f(x_0)$，则称$f(x)$在x_0处右连续；

定理1.8.1 $f(x)$在 x_0点处连续的充要条件是$f(x)$在 x_0点处既左连续又右连续。

函数$f(x)$在点x_0连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

$\Leftrightarrow f(x_0^+) = f(x_0) = f(x_0^-)$

注：此定理可用来判别分段函数在分段点的连续性

例1 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x+2, & x\ge 0, \\ x-2, & x<0, \end{cases}$ 在 $x=0$处的连续性.

解 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+2)=2=f(0),$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x-2)=-2\ne f(0),$

右连续但不左连续，

故函数 $f(x)$在点 $x=0$处不连续.

2. 函数在区间上的连续性

定义1.8.3 若函数 $f(x)$在开区间 (a,b)内每一点处都连续，则称它在开区间(a,b)内连续；若函数$f(x)$在开区间(a,b)内连续，在区间端点a处右连续，在b处左连续，则称它在闭区间$[a,b]$上连续。

函数 $f(x)$在区间 I 上连续，可记为$f(x)\in C(I)$.

比如 $f(x)\in C_{[a,b]}$，表示 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续。

$$C_{[a,b]}=\{f(x):f(x)\text{是在}[a,b]\text{上连续的函数}\}$$

连续函数的图形是一条连续的曲线。

已证：（1）若 $f(x)$为n次多项式，

$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$，其定义域为 D，

当 $x_0\in D$ 时，

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

（2）若 $g(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$,其中$P(x)$,$Q(x)$是多项式,

$$Q(x_0)\neq 0,\quad \lim_{x\to x_0} g(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}=g(x_0)$$

多项式、有理分式函数在其定义域内连续.

例 证明 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续。

证 $\forall x_0 \in R$ $\because \Delta y=\sin(x_0+\Delta x)-\sin x_0$

$$=2\cos\frac{2x_0+\Delta x}{2}\sin\frac{\Delta x}{2}$$

$$\sim 2\cos\frac{2x_0+\Delta x}{2}\cdot\frac{\Delta x}{2}\to 0$$

$\because$ 有界量乘以无穷小量

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$$

$\therefore y=\sin x$ 在 x_0 点连续.

由 x_0 的任意性可知 $y=\sin x\in C_{(-\infty,+\infty)}$

例 证明 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续。

证 $\forall x_0 \in R \quad \because \Delta x \to 0 \ \therefore$ 可令 $0<|\Delta x|<\dfrac{\pi}{2}$

$$\because 0 \le |\Delta y| = |\sin(x_0+\Delta x)-\sin x_0|$$

$$=\left|2\cos\frac{2x_0+\Delta x}{2}\sin\frac{\Delta x}{2}\right| \le 2\cdot\left|\frac{\Delta x}{2}\right|\cdot 1$$

由两边夹准则, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}|\Delta y|=0 \Rightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$

$\therefore y=\sin x$在x_0点连续.

由x_0的任意性可知 $y=\sin x \in C_{(-\infty,+\infty)}$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=0$ (习题1.2(3))

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}\left|f(x)\right|=0$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=0$$

$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$ 使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,

恒有 $|f(x)-0|<\varepsilon.$

$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$ 使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,

恒有 $\big||f(x)|-0\big|<\varepsilon.$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}\left|f(x)\right|=0$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty}\left|f(x)\right|=0$$

1.8.2　初等函数的连续性

1　连续函数的运算

定理1.8.2(函数和、差、积、商的连续性)设函数 $f(x)$, $g(x)$在x_0点连续，则函数 $f(x)\pm g(x)$ ，$f(x)\cdot g(x)$， $f(x)/g(x)$ $(g(x_0)\neq 0)$均在x_0点处连续, 且有:

$$\lim_{x\to x_0}\big(f(x)\pm g(x)\big)=f(x_0)\pm g(x_0)$$

$$\lim_{x\to x_0}\big(f(x)\bullet g(x)\big)=f(x_0)\bullet g(x_0)$$

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{f(x_0)}{g(x_0)}$$

证　由连续的定义及极限四则运算法则可证.

定理1.8.3 (复合函数的连续性) 设函数$u=\varphi(x)$在$x=x_0$点处连续，且$\varphi(x_0)=u_0$，而函数$y=f(u)$在$u=u_0$点处连续，则复合函数$y=f(\varphi(x))$在$x=x_0$点处连续, 且有

$$\lim_{x\to x_0} f(\varphi(x)) = \lim_{u\to u_0} f(u) = f(u_0)$$

$$= f(\varphi(x_0)) = f(\lim_{x\to x_0}\varphi(x))$$

意义：对于由连续函数复合而成函数，求其极限时可以用变量代换 $(u=\varphi(x))$.

例 由于函数 $y=\sin u$ 和 $u=x+\frac{\pi}{2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，由定理知它们的复合函数

$y=\sin(x+\frac{\pi}{2})=\cos x$ 在$(-\infty,+\infty)$上也是连续的

已知$\sin x, \cos x$在$(-\infty, +\infty)$内连续，

由函数和、差、积、商的连续性

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}\text{在}\cos x \neq 0$$

$$\text{即}x \neq n\pi + \frac{\pi}{2}(n \in Z)\text{时连续,}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}\text{在}x \neq n\pi(n \in Z)\text{时连续。}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}\text{在}\cos x \neq 0$$

$$\text{即}x \neq n\pi + \frac{\pi}{2}(n \in Z)\text{时连续}$$

定理1.8.4 (反函数的存在与连续性) 若函数

$y=f(x)$在区间I_x上单调增加(或单调减少)且连续，则它的反函数$x=\varphi(y)$存在，且在相应区间$I_y=\{y\mid y=f(x), x\in I_x\}$上也是单调增加(或单调减少)且连续的。

例如 (1)因$y=\sin x$在$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$上连续、单调增加，

故$y=\arcsin x$在$[-1,1]$上连续、单调增加。

(2)因$y=\cos x$在$[0,\pi]$上连续、单调减少，

故 $y=\arccos x$ 在$[-1,1]$上连续、单调减少。

2 初等函数的连续性

定理1.8.5 基本初等函数在其定义域内都连续。

基本初等函数包括：幂函数、 指数函数、 对数函数、 三角函数、 反三角函数。

证 (1)由$\sin x$的连续性，因为连续函数经四则运算、复合运算得到函数仍连续，以及反函数的连续性，

可知函数$\cos x = \sin(x+\dfrac{\pi}{2})$、$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$、$\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$、

$\arcsin x$、$\arccos x$、$\arctan x$、$\operatorname{arc}\cot x$皆连续。

(2) 指数函数$y=a^x(a>0, a\neq 1)$,　　习题1.3-1(4)

$\because \Delta y=a^{x+\Delta x}-a^x=a^x(a^{\Delta x}-1)$　　书上P55-例2

$\therefore \lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}a^x(a^{\Delta x}-1)=0$, 即$y$在$x$处连续,

若$0<a<1$, 则$\dfrac{1}{a}>1$,　$\lim\limits_{\Delta x\to 0}a^{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{\Delta x}}=1$

运用连续函数的运算定理可得

$y=\log_a x\in C_{(0,+\infty)}$,　$y=x^{\mu}=a^{\mu\log_a x}\in C_{(0,+\infty)}$

初等函数是指：由基本初等函数及常数经过有限次四则运算和有限次复合运算所构成的并可用一个式子表示的函数。

定理1.8.6 初等函数在其定义区间内连续。

注 (1) 定义区间: 包含在定义域内的区间。

初等函数仅在其定义区间内连续，在其定义域内不一定连续，如

$$y=\sqrt{\cos x-1},\quad D: x=0,\pm 2\pi,\pm 4\pi,\cdots$$

该函数在定义域内任一点处皆不连续，因为它在这些点的邻域内没有定义。

$$y=\sqrt{x^2(x-1)^3},\quad D: x=0,\ \text{及}\, x\geq 1,$$

在0点的邻域内没有定义，故它在0处不连续。

该函数在区间$[1,+\infty)$上连续。

(2) 初等函数求极限的方法代入法

若x_0是初等函数$f(x)$定义区间内一点,

则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = f(\lim\limits_{x\to x_0} x)$

极限符号可以与函数符号互换

如 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 + \ln(2-x)}{\arctan x} = \dfrac{4}{\pi}$

函数定义区间:$(-\infty, 0), (0, 2)$

例1 (1) 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}\ (a>0, a\neq 1)$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}$

$$=\log_a[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}]$$

$$=\log_a e=\frac{1}{\ln a}.$$

$\Rightarrow$ 当$x\to 0$时： $\log_a(1+x)\sim\dfrac{x}{\ln a}$

$$\ln(1+x)\sim x$$

(2) 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}(a>0,a\neq 1)$

解 令 $a^x-1=y$, 则 $x=\log_a(1+y)$,

当$x\to 0$时, $y\to 0$. 原式 $=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{\log_a(1+y)}$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\log_a(1+y)^{\frac{1}{y}}}=\frac{1}{\log_a e}=\ln a.$$

$\Rightarrow$ 当$x\to 0$时: $a^x-1\sim x\cdot\ln a$

$$e^x-1\sim x$$

(3) 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\mu}-1}{x}$ (μ是任意实数)

解: 令 $t=(1+x)^{\mu}-1$, 则 $\mu\ln(1+x)=\ln(1+t)$.

且当 $x\to 0$ 时, $t\to 0$, $\ln(1+t)\sim t$

$$\therefore \text{原极限}=\lim_{x\to 0}\frac{t}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+t)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\mu\ln(1+x)}{x}=\mu$$

$\Rightarrow$ 当 $x\to 0$ 时: $(1+x)^{\mu}-1\sim\mu x$

(4) 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$

解　令 $u=\arcsin x$，则$x\to 0$时，$u\to 0.$

所以原式$=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{u}{\sin u}=1$

类似地：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}=1$

$\Rightarrow$ 当$x\to 0$时: $\arcsin x\sim x\sim \arctan x$

重要的等价无穷小关系

当 $x \to 0$时，成立下列等价无穷小关系：

$$(1)\ \sin x \sim x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x$$

$$(2)\ 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$$

$$(3)\ e^x - 1 \sim x \sim \ln(1+x)$$

$$\log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a}$$

$$a^x - 1 \sim x \cdot \ln a$$

$$(4)\ (x+1)^{\frac{1}{n}} - 1 \sim \frac{1}{n}x \qquad (x+1)^{\mu} - 1 \sim \mu x$$

例2 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2-x}{x^2+1}\right)^{\frac{3x-1}{x+1}}$

解

$$\text{原式}=\lim_{x\to\infty} e^{\frac{3x-1}{x+1}\ln\frac{2x^2-x}{x^2+1}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x-1}{x+1}\ln\frac{2x^2-x}{x^2+x}}=e^{3\ln 2}$$

$$=2^3 \quad =\left(\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x}{x^2+1}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x-1}{x+1}}$$

求幂指函数$u(x)^{v(x)}\ (u(x)>0, u(x)\neq 1)$的极限

如果$\lim u(x)=a>0, \lim v(x)=b$,那么

$$\lim u(x)^{v(x)}=\lim e^{v(x)\ln u(x)}$$

$$=e^{\lim v(x)\ln u(x)}=e^{\lim v(x)\cdot\lim\ln u(x)}$$

$$=e^{b\ln a}=a^{b}=[\lim u(x)]^{\lim v(x)}$$

例3 求 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$ 1^{∞} 型

解法一：原式 $=\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{\sin^2 x}\ln(\cos x)}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{\sin^2 x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\cos x-1)}{x^2}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}$$

当 $\varphi(x)\to 0$ 时：$\ln(1+\varphi(x))\sim\varphi(x)$

例3 求$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$ 1^{∞}型

解 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\left\{\left[1+(\cos x-1)\right]^{\frac{1}{\cos x-1}}\right\}^{\frac{\cos x-1}{\sin^2 x}}$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\left[1+(\cos x-1)\right]^{\frac{1}{\cos x-1}}\right\}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin^2 x}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin^2 x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}$$

例4 求 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}\quad(a>0)$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln\dfrac{x}{a}}{x-a}$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\ln\left(1+\dfrac{x}{a}-1\right)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{x-a}{a}}{x-a}=\frac{1}{a}.$$

1.8.3 函数的间断点

1.间断点的定义

定义1.8.4 若函数$f(x)$在x_0点处不连续，则称 x_0为函数$f(x)$的间断点。

注 由定义1.8.1知，函数 $f(x)$在x_0点处连续，需满足以下条件：

(1) $f(x)$在$U(x_0)$内有定义 $\left(x_0 \in D_f\right)$

(2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$存在 $\left(f(x_0^-), f(x_0^+)\text{都存在且相等}\right)$

(3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

若三者有一不满足,则x_0为$f(x)$的间断点。

2. 间断点的分类

定义1.8.5 设点 x_0 是函数 $f(x)$ 的间断点，

(1)如果 $f_-(x_0)$ 与 $f_+(x_0)$ 都存在，则称点 x_0 是函数 $f(x)$ 的第一类间断点；

(2)凡不是第一类间断点的任何间断点称为第二类间断点。

例5 讨论$f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$在$x=2$点的连续性。

解 函数在 $x=2$ 没定义, 故在 $x=2$不连续，但

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=4$$

若补充定义 $y\big|_{x=2}=4$

则$\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x), & x\neq 2 \\ 4, & x=2 \end{cases}$ 在$x=2$点连续,

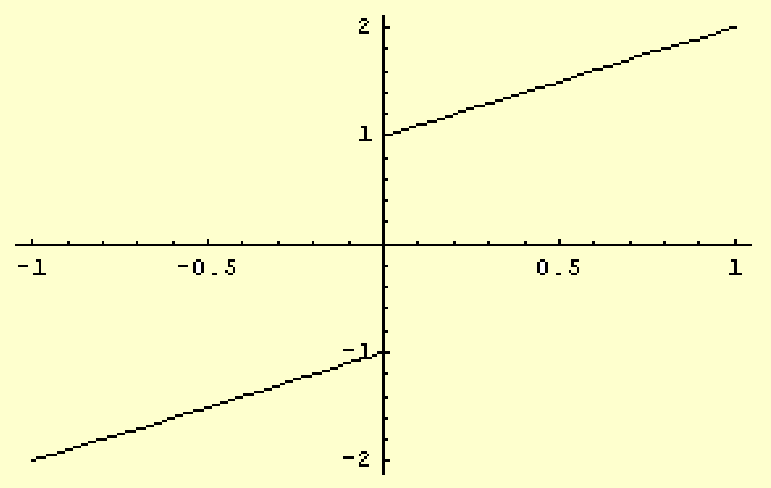
左右极限都存在且相等的间断点，我们称其为可去间断点。

例6 讨论$f(x)=\begin{cases} x-1, x<0 \\ 0, \quad x=0 \\ x+1, x>0 \end{cases}$ 在$x=0$点的连续性。

解 $f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x-1)=-1,\ f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)=1$

左右极限都存在但不相等，故极限 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在，所以$x=0$是函数的间断点。

从图形上来看，函数在此处发生了跳跃，我们称之为跳跃间断点。

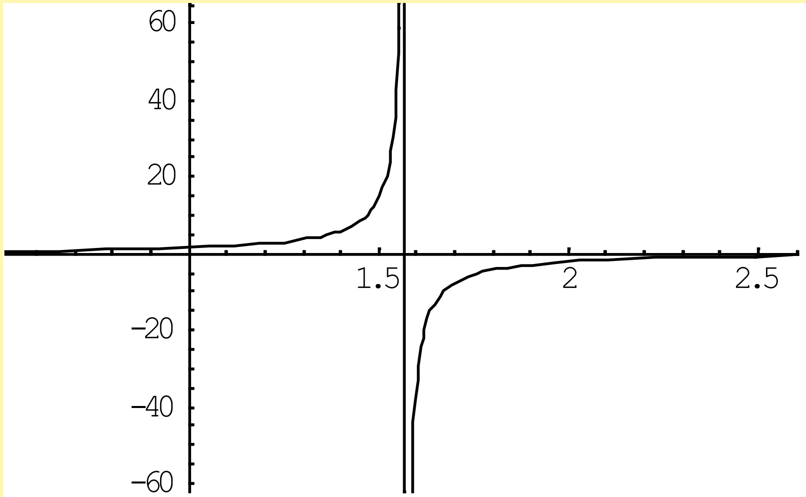


例7 讨论 $y=\tan x$ 在 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 点的连续性。

解 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan x=\infty$

所以 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 是函数 $y=\tan x$的间断点，称为无穷间断点。

注 只要 $f(x_0^-)$或 $f(x_0^+)$ 为无穷大，

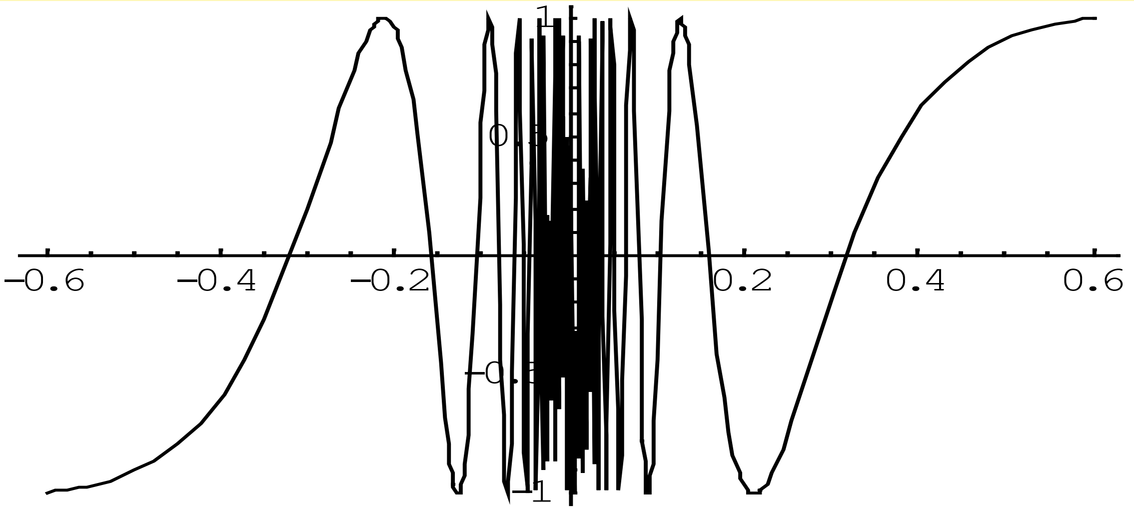


x_0都称为无穷间断点。

例8 讨论 $y=\sin\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 点的连续性。

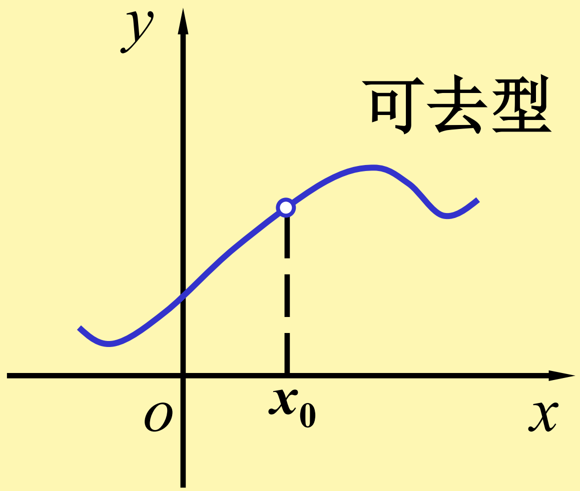
解 $\because \lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在,且在 $x=0$ 左右函数振荡,

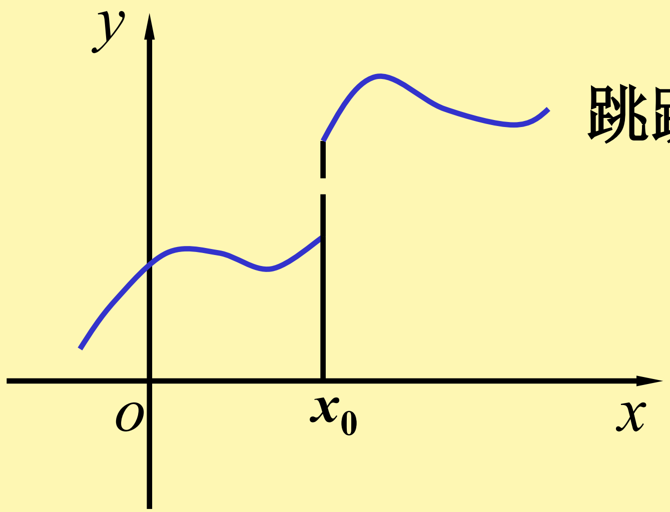
$\therefore$ 称 $x=0$ 为 $y=\sin\frac{1}{x}$ 的 **振荡间断点。**



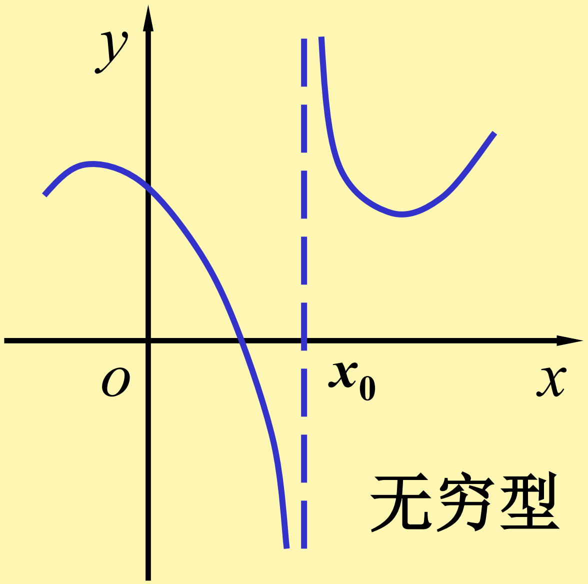
小结　间断点分类

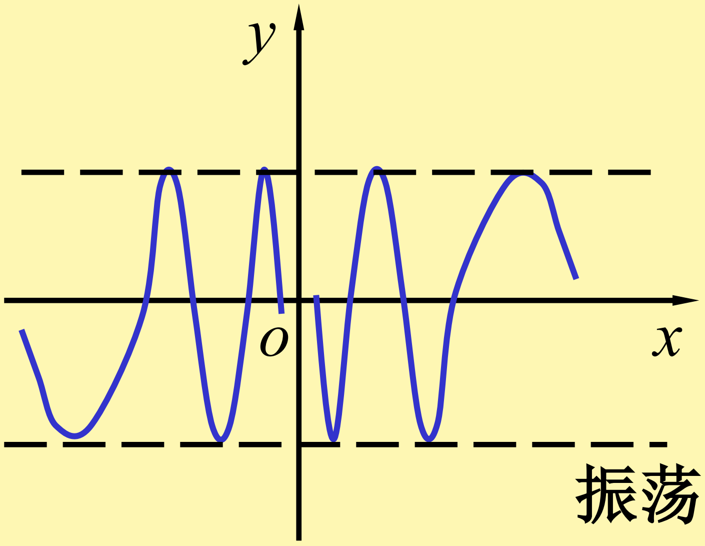
第一类间断点





第二类间断点





例9 讨论函数 $f(x)=\dfrac{3}{2-\dfrac{2}{x}}$的间断点。

解 观察知 $x=0$，$x=1$时 $f\left(x\right)$无定义,

$\therefore x=0$，$x=1$为 $f\left(x\right)$的间断点。

对$x=0$：$\because \lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{2x-2}=0,$

$\therefore x=0$为$f(x)$的可去间断点。

对$x=1$：$\because \lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x}{2x-2}=\infty,$

$\therefore x=1$为$f(x)$的无穷间断点。

注 找间断点时,不可先将函数表达式变形,

否则失去$x=0$为间断点。

例10 讨论 $f(x)=\begin{cases}\cos\frac{\pi}{2}x, & |x|\le 1\\ |x-1|, & |x|>1\end{cases}$ 的连续性。

解 当 $|x|<1$ 时， $f(x)=\cos\frac{\pi}{2}x$ 无间断点，

当 $|x|>1$ 时， $f(x)=|x-1|$ 无间断点，

对 $x=-1$： $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}|x-1|=\lim\limits_{x\to-1}(1-x)=2,$

$\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\cos\frac{\pi}{2}x=0$ $\therefore x=-1$是其跳跃间断点

对 $x=1$： $f(1^-)=0,\quad f(1^+)=0,\quad f(1)=0$

$\therefore f(x)$在$x=1$点连续

例10 讨论 $f(x)=\begin{cases}\cos\frac{\pi}{2}x, & |x|\le 1\\ |x-1|, & |x|>1\end{cases}$ 的连续性。

$f(-1^{+})=f(-1)$

$x=-1$是其跳跃间断点　　　　$f(x)$在$x=1$点连续

故 $f(x)$ 在$(-\infty,-1)$及$[-1,+\infty)$ 内连续, $x=-1$为其跳跃间断点。不能说: $f(x)$在 $(-\infty,-1)\cup[-1,+\infty)$ 内连续

注 (1) 使函数无定义的点，即自然定义域外的点, 必然是间断点;

(2)分段函数的分段点是可疑间断点,讨论左右极限要慎取函数表达式。

(3)讨论函数连续性,须指出函数在某些区间内连续。

判断间断点的步骤：

1. 找出无定义点和可疑间断点（如分段点）

2. 求出 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$

3. 两个都存在：$\begin{cases} \text{相等}\begin{cases} \neq f(x_0)\text{或无定义：可去间断点} \\ = f(x_0)\text{：连续点} \end{cases} \\ \text{不相等：跳跃间断点} \end{cases}$

4. 若有一个不存在：$\begin{cases} \text{只要有一个为}\infty\text{：无穷间断点} \\ \text{其它情形：振荡间断点} \end{cases}$